Математика
Тест 5
Кључ за оцењивање
19. јун 2008.

ОПШТЕ УПУТСТВО ЗА ОЦЕЊИВАЊЕ

Кључ за оцењивање дефинише начин на који се оцењује сваки поједини задатак. У општим упутствима за оцењивање дефинисане су оне ситуације које могу да се јаве у одговорима на различита питања, а која је важно да сви оцењивачи реше на јединствен начин.

1. Задатак са исправним поступком и тачним Резултатом (одговором) добија максимални број поена без обзира да ли је рађен на други начин од оног који предвиђа кључ.
2. Бодови се не одбијају ако тачан Резултат (решење, одговор) није уписан у кућицу предвиђену за Резултате.
3. Задатак у коме се појављује мерна јединица добија максималан број поена чак иако та јединица није написана.
4. Максималан број поена добија се за тачно урађен задатак у чијем решењу постоји слика (или цртеж) иако та слика (цртеж) није урађена, осим ако се то изричито тражи.
5. Бодови се не одбијају ако је цртеж у задатку тачно урађен графитном оловком.
6. Прегледач уписује бодове у предвиђену кућицу поред задатка. За погрешно урађен задатак у кућицу уписати нулу, а за неурађен задатак уписати црту.
7. Уколико је ученик написао тачан Резултат (решење) а није урадио поступак у задацима у којима је поступак потребан, добија нула поена.
8. Уколико је ученик уочио грешку и прецртао део поступка и након тога урадио тачно задатак, добија максималан број поена предвиђених за тај задатак.
9. Број π се мора уписивати и током израде задатка и у одговору ако је то у тексту назначено.

1

1. Израчунати:

А) $23,7-6,11+0,25\cdot 60$;

Б) $0,8+1,4\cdot 5-0,32:0,8$.

Место за рад:

А) $23,7-6,11+0,25\cdot 60 = 17,59+15 = 32,59$;

Б) $0,8+1,4\cdot 5-0,32:0,8 = 0,8+7-0,4 = 7,4$.

Поступак је обавезан.
Тачан одговор под А) доноси 0,5 поена,
тачан одговор под Б) доноси 0,5 поена.
(Укупно 1 поен)

А) $32,59$ **Б)** $7,4$

1

2. Израчунати $2^5\cdot\dfrac{4^3\cdot 8}{4^2\cdot 2^6}-2^3\cdot\dfrac{16^2\cdot 2^4}{2^3\cdot 8^3}$.

Место за рад:

$$2^5\cdot\frac{4^3\cdot 8}{4^2\cdot 2^6}-2^3\cdot\frac{16^2\cdot 2^4}{2^3\cdot 8^3} = 2^5\cdot\frac{\left(2^2\right)^3\cdot 2^3}{\left(2^2\right)^2\cdot 2^6}-2^3\cdot\frac{\left(2^4\right)^2\cdot 2^4}{2^3\cdot\left(2^3\right)^3} = 2^5\cdot\frac{2^6\cdot 2^3}{2^4\cdot 2^6}-2^3\cdot\frac{2^8\cdot 2^4}{2^3\cdot 2^9}$$

$$= \frac{2^9}{2^5}-\frac{2^{12}}{2^9} = 2^4-2^3 = 16-8=8.$$

Поступак је обавезан. **(Укупно 1 поен)**

8

1

3. Раставити на чиниоце изразе:

А) $5a^2b-10a$;

Б) $14a^3b-7ab+21ab^2$.

Место за рад:

А) $5a^2b-10a = 5a(ab-2)$;

Б) $14a^3b-7ab+21ab^2 = 7ab(2a^2-1+3b)$.

Поступак није потребан.
Тачан одговор под А) доноси 0,5 поена,
тачан одговор под Б) доноси 0,5 поена.
(Укупно 1 поен)

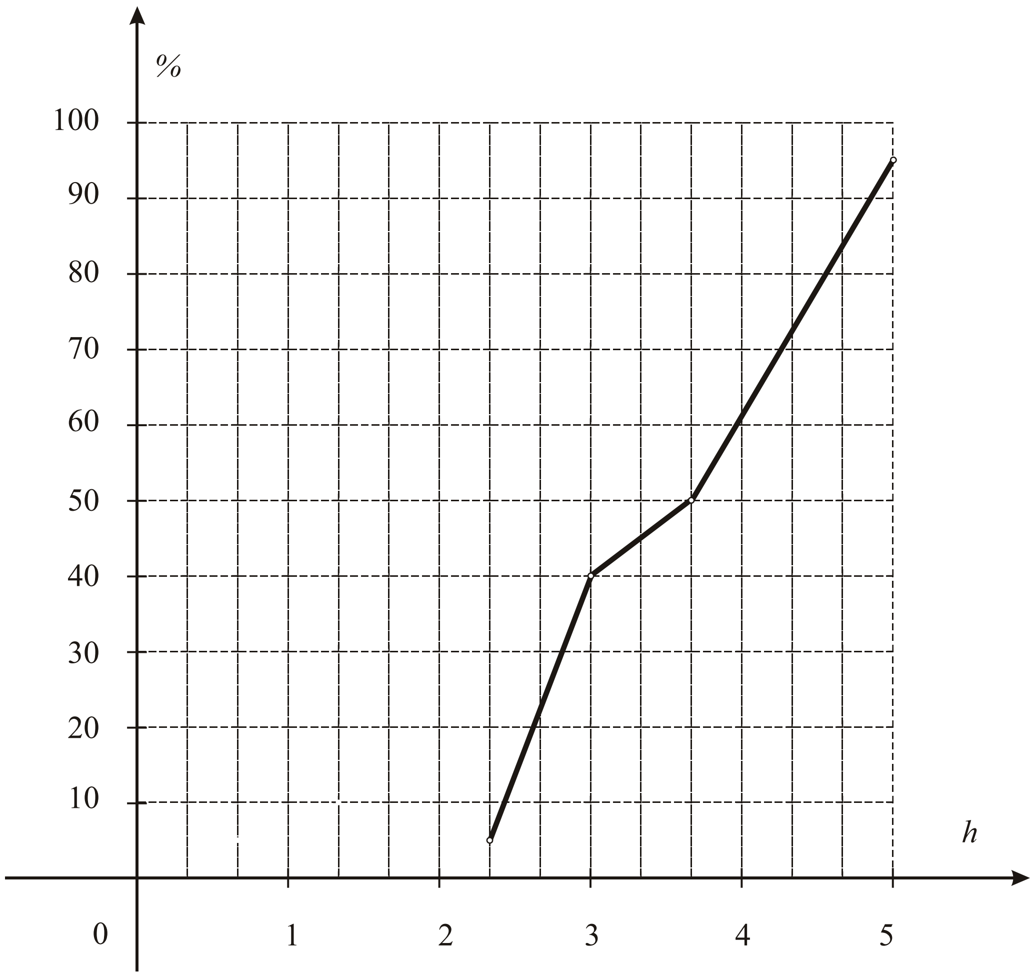
А) $5a(ab-2)$ **Б)** $7ab(2a^2-1+3b)$.

1

4. На графику је приказан проценат учесника једне маратонске трке који је трку завршио после извесног броја сати.

А) После колико минута су први такмичари завршили трку?

Б) У које време после старта је тачно половина учесника завршила трку?



Поступак није потребан.
Тачан одговор под А) доноси 0,5 поена,
тачан одговор под Б) доноси 0,5 поена.
(Укупно 1 поен)
(Уколико су одговори под А) и Б) тачно израчунати у минутима доносе предвиђени број поена)

А) 2 сата и 20 минута; Б) 3 сата и 40 минута.

1

5. Одредити линеарну функцију $y = kx + n$ чији график садржи тачке $A(0,-1)$ и $B(-1,0)$.

Место за рад:

График линеарне функције $y = kx + n$ садржи тачке $A(0, -1)$ и $B(-1, 0)$ једино ако је

$$-1 = k \cdot 0 + n \quad \text{и} \quad 0 = k \cdot (-1) + n,$$

то јест $-1 = n$ и $0 = -k + n$. Зато је $n = -1$ и $k = n = -1$, па је тражена линеарна функција $y = -x - 1$.

Поступак је обавезан.
Тачно израчунато k доноси 0,5 поена,
тачан израчунато n доноси 0,5 поена.
(Укупно 1 поен)
(Уколико су тачно израчунати k и n, а линеарна функција није записана, не одузимати поене)

$y = -x - 1$.

1

6. После преласка на ново радно место једном раднику је плата повећана за 20%. Колика му је била плата ако је то повећање 3.200 динара?

Место за рад:

Означимо са x износ плате тог радника пре преласка на ново радно место. Из услова задатка се види да је

$$20\%x = 3200,$$

то јест

$$\frac{1}{5}x = 3200,$$

одакле је $x = 5 \cdot 3200 = 16000$ динара.

Поступак обавезан. Тачно постављена “формула” доноси 0,5 поена.
(Укупно 1 поен)

16000 динара

7. Збир половине, трећине и петине неког броја је за један већи од тог броја. Који је то број? **1**

Место за рад:

Ако је a тражени број, тада је:

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{5}-1 = a \;/\cdot 30$$
$$15a+10a+6a-30 = 30a,$$
$$31a-30a = 30,$$
$$a = 30.$$

Дакле, тражени број је 30.

Поступак обавезан. Тачно постављена једначина доноси 0,5 поена.
(Укупно 1 поен)

тражени број је 30

8. Решити неједначину $1+\frac{x-6}{3}-\frac{x}{2}\le 3+\frac{3+x}{4}$. **1**

Место за рад:

$$1+\frac{x-6}{3}-\frac{x}{2}\le 3+\frac{3+x}{4} \;/\cdot 12$$
$$12+4(x-6)-6x\le 36+3(3+x),$$
$$12+4x-24-6x\le 36+9+3x,$$
$$4x-6x-3x\le -12+24+36+9,$$
$$-5x\le 57 \;/:(-5),$$
$$x\ge -\frac{57}{5}.$$

Решење неједначине су сви бројеви $x\in\left[-\frac{57}{5},+\infty\right)$.

Поступак је обавезан. **(Укупно 1 поен)**

$x\in\left[-\frac{57}{5},+\infty\right)$

1

9. Решити систем једначина

$$\frac{4x-1}{3}+\frac{5y+1}{4}=5\frac{1}{6}$$
$$\frac{3x+7}{4}+\frac{2y+9}{3}=7\frac{2}{3}.$$

Место за рад:

Ако се обе једначине помноже са 12, а затим упросте и саберу, добија се:

$$\frac{4x-1}{3}+\frac{5y+1}{4} = 5\frac{1}{6} \Big/ \cdot 12$$
$$\frac{3x+7}{4}+\frac{2y+9}{3} = 7\frac{2}{3} \Big/ \cdot 12$$

$$4(4x-1)+3(5y+1) = 62$$
$$3(3x+7)+4(2y+9) = 92$$

$$16x-4+15y+3 = 62$$
$$9x+21+8y+36 = 92$$

$$16x+15y = 63 \Big/ \cdot(-8)$$
$$9x+8y = 35 \Big/ \cdot 15$$

$$-128x-120y=-504$$
$$135x+120y = 525$$
(сабрати једначине)

$$7x = 21$$
$$x = 3.$$

Сада, заменом добијене вредности за x у једначину $9x+8y = 35$, добијамо:

$$27+8y = 35,$$
$$8y = 8,$$

то јест

$$y = 1.$$

Решење система је уређени пар (3, 1).

Поступак обавезан. Тачно израчуната једна променљива доноси 0,5 поена.
(Укупно 1 поен)

(3, 1)

1

10. Правоугаоник је уписан у круг полупречника 15 cm и једна његова страница је 24 cm. Одредити обим тог правоугаоника.

Место за рад:

Дијагонала правоугаоника је пречник описаног круга, па је $d = 2 \cdot 15$, то јест $d = 30 \text{ cm}$.

Ако је b друга страница тог правоугаоника, биће:

$$a^2 + b^2 = d^2$$
$$24^2 + b^2 = 30^2$$
$$b^2 = 900 - 576$$
$$b^2 = 324,$$
$$b = 18 \text{ cm}.$$

Тражени обим тог правоугаоника је $O = 2a + 2b$, то јест $O = 84 \text{ cm}$.

Поступак је обавезан.
Тачно израчуната друга страница правоугаоника доноси 0,5 поена,
тачно израчунат обим правоугаоника доноси 0,5 поена.
(Укупно 1 поен)

$O = 84 \text{ cm}$

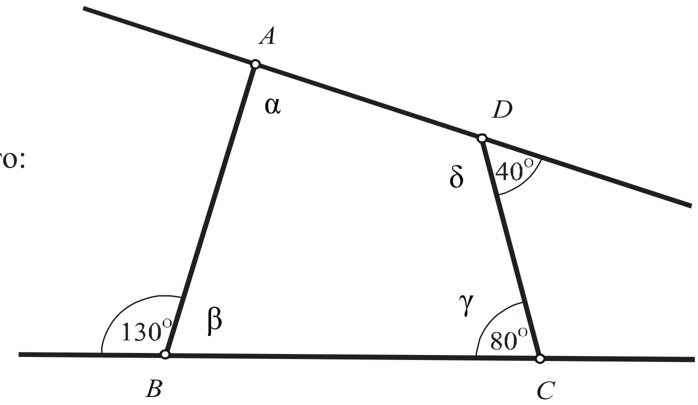
1

11. Ако су подаци као на приложеном цртежу, израчунати угао α.

Место за рад:

Ако су ознаке као на приложеном цртежу, унутрашњи углови четвороугла *ABCD* су α и

$$\beta = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ,$$
$$\gamma = 80^\circ,$$
$$\delta = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$



Њихов збир мора бити 360º, па је зато:

$$\alpha + 50^\circ + 80^\circ + 140^\circ = 360^\circ,$$
$$\alpha + 270^\circ = 360^\circ,$$
$$\alpha = 360^\circ - 270^\circ.$$

Тражени угао је $\alpha = 90^\circ$.

Поступак је обавезан. **(Укупно 1 поен)**

$\alpha = 90^\circ$

1

12. Дужине ивица квадра су 3 cm, 4 cm и 12 cm. Одредити површину тог квадра и дужину његове дијагонале.

Место за рад:

Ако су a, b и c ивице квадра, тада је тражена површина:

$$P = 2(ab+bc+ac),$$
$$P = 2\cdot(3\cdot4+4\cdot12+3\cdot12),$$
$$P = 2\cdot96,$$
$$P = 192\ \mathrm{cm}^2.$$

Тражена дијагонала квадра је:

$$D = \sqrt{a^2+b^2+c^2},$$
$$D = \sqrt{3^2+4^2+12^2},$$
$$D = \sqrt{9+16+144},$$
$$D = \sqrt{169},$$
$$D = 13\ \mathrm{cm}.$$

Поступак је обавезан.
Тачно израчуната дијагонала D квадра доноси 0,5 поена,
тачно израчуната површина P квадра доноси 0,5 поена.
(Укупно 1 поен)

$P = 192\ \mathrm{cm}^2$ $D = 13\ \mathrm{cm}$

1,5

13. Два круга полупречника $r = 3$ cm додирују по три странице правоугаоника и растојање између њихових центара је 7 cm. Одредити површину тог правоугаоника.

Место за рад:

Ако су ознаке као на приложеном цртежу, тада је:

$$AB = r + OS + r,$$

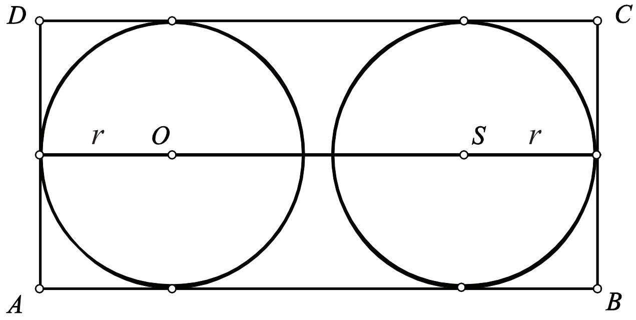
$$AB = 3 + 7 + 3,$$

$$AB = 13 \text{ cm},$$

као и

$$AD = 2r,$$

$$AD = 6 \text{ cm}.$$



Тражена површина правоугаоника је:

$$P = AB \cdot AD,$$

$$P = 13 \cdot 6,$$

$$P = 78 \text{ cm}^2.$$

Поступак је обавезан.
Тачно израчуната страница *AB* правоугаоника *ABCD* - 0,5 поена,
тачно израчуната страница *AD* правоугаоника *ABCD* - 0,5 поена,
тачно израчуната површина правоугаоника *ABCD* - 0,5 поена.
(Укупно 1,5 поена)

$P = 78 \text{ cm}^2$

1,5

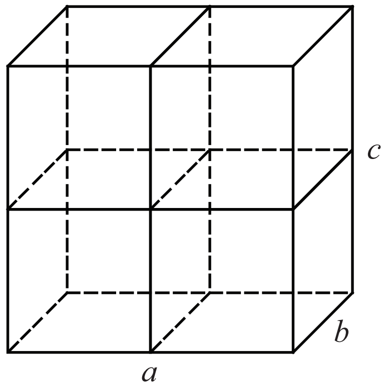
14. Одредити површину квадра који је, као на приложеном цртежу, састављен од четири једнаке коцке ивице $a = 2$ cm.

Место за рад:

Ивице квадра, састављеног од четири једнаке коцке (видети цртеж), су редом $a = 4$ cm, $b = 2$ cm и $c = 4$ cm.

Тражена површина је:

$$P = 2\cdot(ab+ac+bc),$$
$$P = 2\cdot(4\cdot2+4\cdot4+2\cdot4),$$
$$P = 2\cdot(8+16+8),$$
$$P = 2\cdot32,$$
$$P = 64 \text{ cm}^2.$$



Поступак је обавезан.
Тачно одређене ивице квадра доносе 0,5 поена,
тачно израчуната површина квадра доноси 1 поен.
(Укупно 1,5 поена)

$P = 64 \text{ cm}^2$.

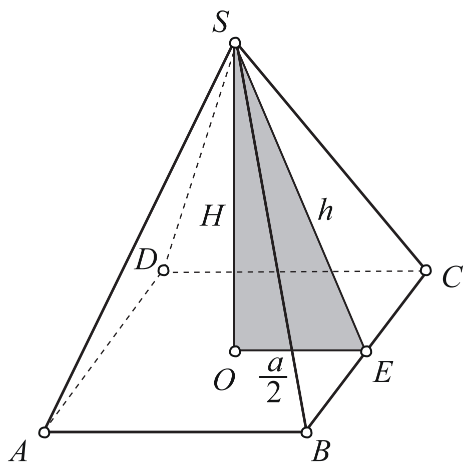
1,5

15. Израчунати запремину правилне четворостране пирамиде ако је њена основна ивица a = 8 cm и ако је површина једне њене бочне стране 20 cm^2.

Место за рад:

Бочна страна правилне четворостране пирамиде је једнакокраки троугао. Ако је h апотема пирамиде, површина тог троугла је $P = \frac{a \cdot h}{2}$. Како је P = 20 cm^2 и $a = 8$ cm, биће:

$$20 = \frac{8 \cdot h}{2},$$
$$h = \frac{40}{8},$$
$$h = 5 \text{ cm}.$$



Применом Питагорине теореме на троугао SOE (видети цртеж) добијамо висину H пирамиде:

$$H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$
$$H^2 = 5^2 - 4^2,$$
$$H^2 = 9,$$
$$H = 3 \text{ cm}.$$

Тражена запремина је:

$$V = \frac{B \cdot H}{3},$$
$$V = \frac{8^2 \cdot 3}{3},$$
$$V = 64 \text{ cm}^3.$$

Поступак је обавезан.
Тачно израчуната апотема h пирамиде доноси 0,5 поена,
тачно израчуната висина H доноси 0,5 поена,
тачно израчуната запремина пирамиде доноси 0,5 поена.
(Укупно 1,5 поена)

V = 64 cm^3

1,5

16. Обим основе праве купе је 36π cm. Изводница купе нагнута је према равни основе под углом од 45^{o}. Израчунати:

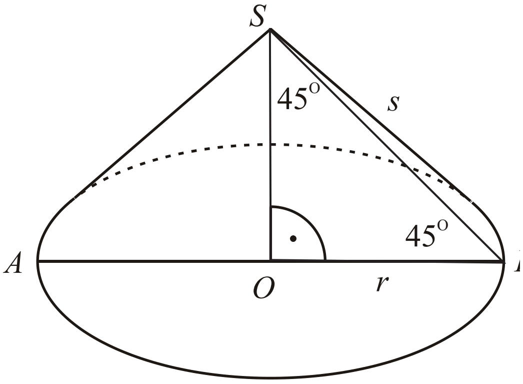
А) површину купе;

Б) запремину купе.

Место за рад:

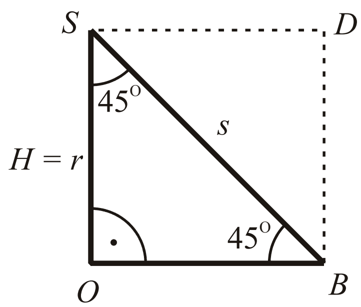
Обим основе купе је $O = 2r\pi$. Према услову задатка је $O = 36\pi$ cm, па добијамо:

$$2r\pi = 36\pi,$$
$$r = 18\ \text{cm}.$$



Троугао OBS је једнакокрако-правоугли, а четвороугао $OBDS$ је квадрат (видети други цртеж). Висина купе једнака је полупречнику основе: $H = r = 18$ cm.

Изводница s купе је дијагонала квадрата $OBDS$, па је $s = 18\sqrt{2}$ cm.



А) Тражена површина је:

$$P = r^2\pi + r\pi s,$$
$$P = 18^2\pi + 18\cdot\pi\cdot 18\sqrt{2},$$
$$P = 324\pi\left(1+\sqrt{2}\right)\ \text{cm}^2.$$

Б) Тражена запремина је:

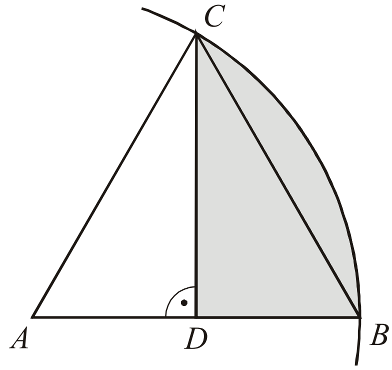
$$V = \frac{1}{3}r^2\pi\cdot H,$$
$$V = \frac{1}{3}\cdot 18^2\pi\cdot 18,$$
$$V = 1944\pi\ \text{cm}^3.$$

Поступак је обавезан.
Тачно израчунат полупречник r основе купе доноси 0,5 поена,
тачно урађен део задатка под А) доноси 0,5 поена,
тачно урађен део задатка под Б) доноси 0,5 поена.
(Укупно 1,5 поена)

А) $P = 324\pi\left(1+\sqrt{2}\right)\ \text{cm}^2$ **Б)** $V = 1944\pi\ \text{cm}^3$

2

17. Висина CD једнакостраничног троугла ABC је 6 cm и око темена A је описан круг полупречника AB. Одредити површину осенчене фигуре.



Место за рад:

Нека је a страница једнакостраничног троугла ABC. Из

$$\frac{a}{2}\sqrt{3} = 6,$$

налазимо

$$a = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}.$$

Осенчена површина се добија када се од површине кружног исечка полупречника a са централним углом BAC једнаким $60°$ одузме површина троугла ADC који је једнак половини једнакостраничног троугла ABC:

$$P = \frac{a^2\pi\cdot 60°}{360°} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2\pi}{6} - \frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{48\pi}{6} - \frac{48\sqrt{3}}{8} = 8\pi - 6\sqrt{3} = 2\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)\,\mathrm{cm}^2.$$

Поступак је обавезан.
Тачно израчуната страница *a* троугла *ABC* доноси 0,5 поена,
тачно израчуната површина кружног исечка полупречника *a* и централног угла *BAC* доноси 0,5 поена,
тачно израчуната површина троугла *ADC* доноси 0,5 поена.
(Укупно2 поена)

$2\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)\,\mathrm{cm}^2$